

基于平面聚类算法的欠定混叠盲信号分离^{*}

谢胜利^{**} 谭北海 傅予力

华南理工大学电子与信息学院, 广州 510641

摘要 基于平面聚类的方法, 对具有 3 个观测信号的欠定盲分离问题进行了探讨, 该方法不再要求源信号是充分稀疏的, 即源信号在同一时刻不只有一个起主导作用. 先通过转化将平面聚类化为法线聚类, 然后通过寻找由法线聚类所确定的平面族之交线识别出混叠矩阵, 为 Georgiev (2005) 提出的最新理论提供了相应分离算法的有效途径. 仿真结果表明所给方法在估计混叠矩阵时的准确性以及源信号的良好恢复能力.

关键词 欠定混叠 稀疏表示 混叠矩阵 盲分离

盲信号分离问题自研究至今已经取得了许多优异的成绩^[1-6], 但是以往的研究多数是针对过定盲分离而言, 即观测器的个数多于源信号的个数, 因此在实际应用中有许多限制. 为此, 对于观测器个数少于源信号个数的欠定盲分离问题的研究, 目前已是国际上盲信号处理领域中备受人们关注的具有挑战性的问题, 在这种情况下, 观测信号的个数 m 少于源信号的个数 n . 相应的盲信号分离模型如下

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 $m < n$. 或者写成向量形式为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_1 s_1(t) + \mathbf{a}_2 s_2(t) + \cdots + \mathbf{a}_n s_n(t), t = 1, \cdots, T \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)]^T$ 是观测信号, $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \cdots, s_n(t)]^T$ 为源信号,

$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n]$ 是 $m \times n$ 的混叠矩阵, $\mathbf{a}_i = [a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi}]^T, i = 1, \cdots, n$.

对此问题的研究, 人们目前采用的通常方法是稀疏分解. 利用信号在时域和变换域中的稀疏性进行盲信号分离. 如 Belouchrani 针对离散源信号提出的“最大后验概率”方法^[7]; Zibulevsky 提出的稀疏分解方法^[9], Bofill 提出的频域稀疏表示方法^[10], 肖明等提出的暂态稀疏分析方法^[11, 12], 以及 Lee^[13], Lewicki^[8], Li^[14] 和谢胜利^[15] 的超完备基表示 (overcomplete representation) 方法以及最近的一些稀疏盲分离方法^[6, 17] 等等. 以上方法所对应的算法都获得了较好的盲分离效果, 极大地推动了欠定盲信号分离的发展.

通常讲的稀疏信号, 就是说源信号在绝大多数时刻的采样点取值为零, 或者接近于零, 少数采样点取值明显远离零. 上面所提到的方法都是针对源信号充分稀疏的情况下进行的, 即源信号中在同一时刻只有一个源信号取值较大, 其他源信号取值为零, 或者接近于零. 不妨假设在时刻 t , 只有源信号 $s_i(t)$ 取值非零, 其他源信号幅值皆很小或为零,

2006-07-20 收稿, 2006-11-21 收修改稿

^{*} 国家杰出青年科学基金(批准号: 60325310)、广东省自然科学基金团队研究项目(批准号: 04205783)、国家重点基础研究发展计划前期研究专项(批准号: 2005CCA04100)、国家自然科学基金(批准号: 60674033, 60505005)和广东省自然科学基金(批准号: 05103553, 05006508)资助项目

^{**} E-mail: adshlxie@scut.edu.cn

此时(2)式可写成

$$x(t) = a_i s_i(t) \quad (3)$$

由此可知 a_i 与第 t 时刻的观测信号 $x(t)$ 共线, 因此对 $x(t)$ 在所有时刻进行聚类, 即可得到混叠矩阵的估计 $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, 这就是目前将稀疏分量分析用于欠定盲分离方法之一的 K-均值聚类法^[9, 10], 估计出混叠矩阵 A 后, 再借助线性规划估计出源信号 $S(t)$.

由于以上对稀疏信号的要求非常高, 在同一时刻只允许一个源信号起主导作用, 所以在应用中有一定的局限. 为此, Georgiev 提出了一种新的解决欠定盲分离的方法^[6], 这种方法允许源信号在同一时刻有多个源信号起主导作用. 其结论如下:

定理 若如下条件(1)–(3)成立, 则可恢复出源信号, 其中

条件(1) 混叠矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 它的任何 $m \times n$ 子矩阵都是非奇异方阵.

条件(2) 源信号的任何采样时刻 $S(t)$ 最多只有 $m-1$ 个非 0 元素.

条件(3) 源信号采样足够多, 即对任何包含 $n-m+1$ 个下标的集合 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{n-m+1}\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 在 S 中至少存在 m 个列向量, 使得它们在下标为 I 里面的集合元素时, 它们的值为 0, 而它们中的另外 $m-1$ 个元素是线性独立的.

该定理首次从理论上阐明了稀疏分析的方法, 不仅仅只对充分稀疏的源信号可以进行分析, 而对不充分稀疏的信号仍然是有效的工具, 且给出了有效的不充分稀疏程度. 这是一个欠定稀疏盲分离的重要成果. 该结果发表后, 人们正在努力探寻与该理论相应的有效的盲分离算法, 因在这种情况下, 通常的线 K-均值聚类方法不再适用. 本文针对一类特殊的情况($m=3$, 即只有 3 个观测器的情况)进行探讨, 以期从简单入手寻求普遍规律. 我们将对平面的聚类转化成普通的法线聚类, 然后通过寻找平面族的交线识别出混叠矩阵 A .

1 平面聚类及源信号的恢复算法

由前述可知, 对于这种不是充分稀疏的情况, 目前通常的线 K-均值聚类方法已不再适用, 而要寻

找相应的面聚类方法. 我们的盲恢复仍然是采用两步法, 其一是辨识混叠矩阵, 其二是恢复源信号. 只不过对混叠矩阵的辨识采用的是平面聚类方法.

1.1 混叠矩阵的确定

当 $m=3$ 时, 由条件(2)知, 对任意时刻 t 至多有两个源信号非零, 从而(3)式为

$$x(t) = a_{i_1} s_{i_1}(t) + a_{i_2} s_{i_2}(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

其中 $\{i_1, i_2\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. 由条件(1)知, 混叠矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 中任何 $m \times m$ 子矩阵都是非奇异方阵, 所以 A 中任何 $m-1$ 列也是线性无关的, 因此可以由向量组 $\{a_{i_1}, a_{i_2}\}$ 构成一个平面, 记该平面为 $P_i = \{\beta a_{i_1} + \gamma a_{i_2} \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, \gamma \neq 0\}$. 而且由(4)式可知, $x(t) \in P_i$, 即 $x(t)$ 在 $\{a_{i_1}, a_{i_2}\}$ 构成的平面 P_i 上. 又因为混叠矩阵 A 的任何两列线性无关, 因此由混叠矩阵的任何两列可以组成 C_n^2 个不同的平面 $P_j, j=1, 2, \dots, C_n^2$, 而这 C_n^2 个平面中同时含 A 的某列 a_j 的平面有 $n-1$ 个, 也即 a_j 属于这 $n-1$ 个平面的交线, 即 $a_j \in \bigcap P_{j_k}, k=1, 2, \dots, n-1$. 而对 $t \in \{1, 2, \dots, T\}$, $x(t)$ 一定属于这 C_n^2 个平面中的某一个平面. 因此为了估计出混叠矩阵, 只要对所有的 $x(t)$ 进行聚类找出相应的 C_n^2 个平面 $P = \{P_j, j=1, 2, \dots, C_n^2\}$, 然后在这些平面里面取包含 $n-1$ 个平面构成所有子集, 而在所有的这些子集中, 只有子集中的平面交于同一线的这样的子集才是我们要找的, 这条交线即是 A 的某列 a_j , 因为混叠矩阵 A 有 n 列, 所以这样的子集一共有 n 个, 它们的 n 条交线就是混叠矩阵 A 的所有列向量.

为了方便起见, 我们不妨假设 $m=3, n=4$ (对一般的 n 可完全类似地进行). 当 $m=3, n=4$ 时, (2)式可写为:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} s_1(t) + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} s_2(t) + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} s_3(t) + \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} s_4(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

或者

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_{1S_1}(t) + \mathbf{a}_{2S_2}(t) + \mathbf{a}_{3S_3}(t) + \mathbf{a}_{4S_4}(t) \quad (6)$$

其中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$, $\mathbf{a}_i = [a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}]^T$, 并由条件(2), 不妨设在 t 时刻, 源信号的第 i 个和第 j 个不等于 0, 则

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_{iS_i}(t) + \mathbf{a}_{jS_j}(t), \quad t = 1 \dots T, \quad (7)$$

由(7)式可知, 此时此刻的观测向量 $\mathbf{x}(t)$ 在混叠矩阵的第 i 列 \mathbf{a}_i 和第 j 列 \mathbf{a}_j 构成的平面上. 由条件(1)知, 混叠矩阵的任何两列都不相关, 因此混叠矩阵的任何两列组合可以确定 C_2^4 个平面. 不妨用 $p_{12}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2), p_{13}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3), p_{14}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4), p_{23}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), p_{24}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4), p_{34}(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ 表示. 由上述可知 对观测信号进行平面聚类, 即可估计得到混叠矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$, 下面我们给出混叠矩阵聚类算法及利用它来恢复源信号.

为了确定 6 个平面, 我们转而来确定它们的 6 条法线, $\mathbf{n}_{12}, \mathbf{n}_{13}, \mathbf{n}_{14}, \mathbf{n}_{23}, \mathbf{n}_{24}, \mathbf{n}_{34}$, 因为平面法线和平面是一一对应的, 如果它们的法线确定后, 它们所对应的平面也就确定了.

因为平面是由法线确定的, 所以为了确定聚类平面, 下面转变为对其法线的线聚类, 和 K-均值聚类相似, 为了确定每一类观测信号向量点所在的平面, 我们就要确定它们法线构成的聚类中心, 而对法线进行聚类时, 最重要的就是对聚类中心不断的修改和提高.

假设要聚类的点为 $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T, t=1, 2, \dots, N_0$. 为了确定这些点所在的平面, 我们不妨假设这个平面的法线为 $\mathbf{n}_0 = [n_{01}, n_{02}, n_{03}]^T$, 且 $(n_{01})^2 + (n_{02})^2 + (n_{03})^2 = 1$, 即法线单位化. 由内积定义可知:

$$\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{y}(t) \rangle = n_{01}y_1(t) + n_{02}y_2(t) + n_{03}y_3(t) = \|\mathbf{n}_0\| \cdot \|\mathbf{y}(t)\| \cdot \cos\theta_{n_0, \mathbf{y}(t)} \quad (8)$$

其中 $\theta_{n_0, \mathbf{y}(t)}$ 为法线 \mathbf{n}_0 和 $\mathbf{y}(t)$ 之间的夹角, 因此 $0 \leq \theta_{n_0, \mathbf{y}(t)} \leq \pi$, 所以 $-1 \leq \cos\theta_{n_0, \mathbf{y}(t)} \leq 1$, 由(8)式得到

$$\begin{aligned} \cos\theta_{n_0, \mathbf{y}(t)} &= \frac{n_{01}y_1(t) + n_{02}y_2(t) + n_{03}y_3(t)}{\|\mathbf{n}_0\| \cdot \|\mathbf{y}(t)\|} \\ &= \frac{n_{01}y_1(t) + n_{02}y_2(t) + n_{03}y_3(t)}{\|\mathbf{y}(t)\|} \end{aligned} \quad (9)$$

为了简化(9)式, 我们单位化聚类点 $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T$, 即让 $\|\mathbf{y}(t)\| = 1, t=1, 2, \dots, N_0$, 因此(9)式可化为:

$$\begin{aligned} \cos\theta_{n_0, \mathbf{y}(t)} &= n_{01}y_1(t) + n_{02}y_2(t) + n_{03}y_3(t) \\ &= (\mathbf{n}_0, \mathbf{y}(t)) \end{aligned} \quad (10)$$

因此如果要确定 $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^T, t=1, 2, \dots, N_0$ 所在的平面, 即要找到法线 $\mathbf{n}_0 = [n_{01}, n_{02}, n_{03}]^T$, 使得 $\theta_{n_0, \mathbf{y}(t)} \rightarrow \frac{\pi}{2}, t=1, 2, \dots, N_0$, 也即使得

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 &= \arg \min_{\mathbf{n}_0} \sum_{t=1}^{N_0} |\cos\theta_{n_0, \mathbf{y}(t)}| \\ \text{s. t. } & (n_{01})^2 + (n_{02})^2 + (n_{03})^2 = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 &= \arg \min_{\mathbf{n}_0} \sum_{t=1}^{N_0} |(\mathbf{n}_0, \mathbf{y}(t))| \\ \text{s. t. } & (n_{01})^2 + (n_{02})^2 + (n_{03})^2 = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

或者

$$\mathbf{n}_0 = \arg \min_{\mathbf{n}_0} \sum_{t=1}^{N_0} \cos^2 \theta_{n_0, \mathbf{y}(t)} \quad (13)$$

下面为了进行平面聚类分析, 首先我们将 $\mathbf{x}(t), t=1, \dots, T$ 单位化到一个球面上, 此时观测信号向量就相当于球面上的一点, 又因为在同一个聚类平面, 下半面和上半面的法线是一样的, 因此将位于下半球面的观测信号向量点关于原点对称到上半球面, 即得到新的观测信号 $\|\mathbf{x}(t)\| = 1, t=1, 2, \dots, T$ 为

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} & \text{若 } x_3(t) \geq 0. \\ -\frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} & \text{若 } x_3(t) < 0. \end{cases} \quad t = 1, \dots, T,$$

因此对单位化和对称化后的观测信号向量点 $\hat{x}(t)$ 进行聚类分析即是对原 $x(t)$, $t=1, \dots, T$ 的分析, 如图 1 所示.

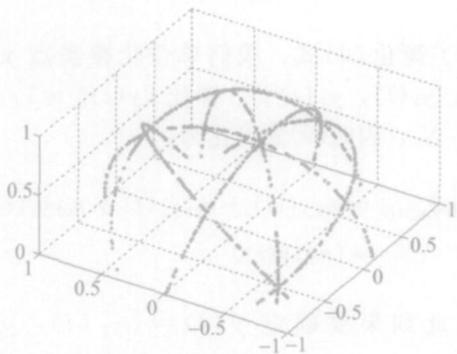


图 1 初始化观测信号的示意图

以(12)式为依据, 下面给出平面聚类的详细算法:

(1) 由(14)式单位化和对称化所有观测信号向量 $x(t)$, $t=1, \dots, T$ 到上半球面得到新的观测信号点 $\hat{x}(t)$, $t=1, \dots, T$.

(2) 随机产生 6 个已经单位化且位于上半球面的初始法向量点, 即 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$.

(3) 分别计算 $\hat{x}(t)$, $t=1, \dots, T$ 与 n_i , $i=1, \dots, 6$ 的内积, 并取它们的绝对值. 令 $X_i = \{\hat{x}(t), |\langle \hat{x}(t), n_i \rangle| < |\langle \hat{x}(t), n_j \rangle|, j \neq i; i, j=1, 2, \dots, 6\}$.

(4) 接下来修改初始法向量, 令 $n = [\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta]$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

for $i=1 : 6$

$\hat{n}_i = n_i$;

for $\theta=0 : \eta_1 : \frac{\pi}{2}$

for $\varphi=0 : \eta_2 : 2\pi$

if $|\langle X_i, n \rangle| < |\langle X_i, \hat{n}_i \rangle|$

$n_i = n$;

end

end

end

end

其中 η_1, η_2 分别表示步长, $|\langle X_i, n \rangle|$, $|\langle X_i, \hat{n}_i \rangle|$ 分别表示第 i 类集合里面所有点与法线 n, \hat{n}_i 的内积绝对值的和.

(5) 直到 $|\hat{n}_i - n_i| < \epsilon_i$, $i=1, \dots, 6$, 否则继续第 3 步.

(6) 算法结束, 得到聚类后的法线 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$.

由上述算法得到的平面法线, 下面通过分类, 即可得到混叠矩阵. 因为混叠矩阵中的任何一列向量 a_i 都与其他每个列向量 a_j ($j \neq i$) 构成一个平面, 所以 a_i 必定与由上述 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ 这 6 条法线中的 3 条是正交的, 同时与 a_i 正交的这 3 条法线又必定在同一个平面, 因此只要在 $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ 中找出任何属于同一个平面的 3 条法线, 它们即可确定得到混叠矩阵的列向量 a_i ($i=1, \dots, 4$).

最后, 本算法得到的混叠矩阵 $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$, 尽管 a_i ($i=1, \dots, 4$) 可能与原混叠矩阵存在幅度或者顺序的不同, 但是这并不影响盲分离.

1.2 源信号恢复

由上述算法估计得到混叠矩阵 $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ 后, 假设混叠矩阵的第 a_i, a_j ($i \neq j$) 列组成的平面的法向量是上述聚类得到的 n_k ($k \in \{1, \dots, 6\}$), 则与 n_k 对应的观测信号集合为 X_i ($i \in \{1, \dots, 6\}$), 且对任意的 $x(t) \in X_i$, 有

$$x(t) = a_i s_i(t) + a_j s_j(t) \quad (15)$$

或者

$$x(t) = A_{ij} S_{ij}(t) \quad (16)$$

其中 $A_{ij} = [a_i, a_j]$, $S_{ij}(t) = [s_i(t), s_j(t)]^T$. 因此

$$S_{ij}(t) = A_{ij}^{\#} x(t) \quad (17)$$

其中 $A_{ij}^{\#}$ 表示矩阵 A_{ij} 的广义逆. 所以源信号在第 t 时刻只有第 i, j 个源信号由(17)式得到, 其他都是 0, 因此源信号可恢复.

2 仿真实验

为了说明我们所给算法的有效性, 下面将就图像信号进行仿真实验. 其分离效果我们将采用通常的评价标准^[10], 信噪比 (SNR: signal to noise

rate), 即

$$SNR = 10 \lg \frac{\|S\|^2}{\|S - \hat{S}\|^2} \quad (18)$$

其中 \hat{S} 为 S 的估计, 且通常 SNR 越大, 分离效果越好, 一般 $SNR \geq 25$ 时效果就非常好了.

在下面仿真中, 我们任取 4 幅满足稀疏条件的 64×64 图像进行仿真试验, 如下图 2 所示, 其中第 4 幅为噪声图像, 它们经过变换后能够满足 Pando Georgiev 的 3 个稀疏条件, 下面我们随机产生一个 3×4 的混叠矩阵 $A =$

$$\begin{bmatrix} 0.0149 & 0.3494 & 0.5825 & 0.6995 \\ 0.6758 & 0.3248 & 0.7328 & 0.3495 \\ 0.7369 & 0.8789 & 0.3517 & 0.6233 \end{bmatrix},$$

并将 4 幅图像分别拉成 4 个一维的输入源信号, 通过混叠矩阵得到观测信号如图 3, 这时利用上述的平面聚类转化为平面的法线的线聚类算法对经过初始变换的观测信号进行分析, 得到估计的混叠矩阵为 $A =$

$$\begin{bmatrix} -0.5810 & -0.0137 & 0.3489 & -0.6985 \\ -0.7330 & -0.6760 & 0.3255 & -0.3489 \\ -0.3538 & -0.7367 & 0.8788 & -0.6243 \end{bmatrix},$$

尽管估计的混叠矩阵 A 与原混叠矩阵 A 存在符号和顺序的差异, 但是这并不影响盲分离的结果, 下面图 4 是利用第 1.2 节的源信号恢复算法恢复得到的源信号.

最后由(18)式定义的信噪比计算, 在本文的算法用到上面图像分离后得到的图像的信噪比分别是 118.6812, 123.6461, 129.6079, 171.0228, 因此算法是成功的.

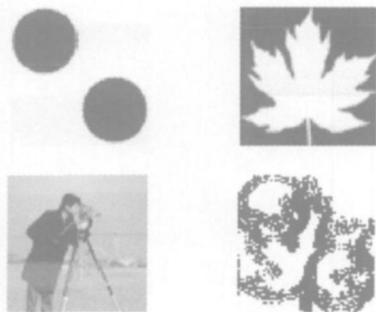


图 2 4 幅源图像



图 3 混合后的图像

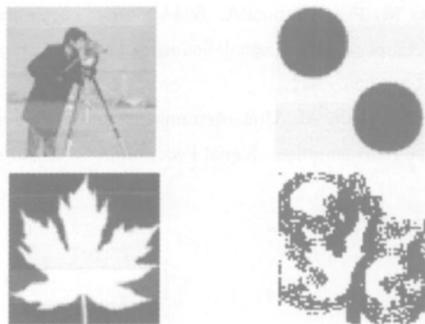


图 4 恢复后的源图像

3 结论

本文给出了一种在欠定混叠情况下的稀疏信号盲分离算法和理论, 首先通过平面聚类算法对混叠矩阵估计, 然后利用估计得到混叠矩阵来恢复源信号, 实现盲分离, 理论和仿真实验证明了此算法在恢复源信号时的可行性, 以及恢复后良好性能, 同时对于高维的混叠矩阵同样可以类似用此方法进行估计和分离. 由于 Pando Georgiev 条件对源信号的稀疏度要求降低, 针对这类稀疏盲分离, 更多更优异性能的算法研究将是一个开放的问题.

参 考 文 献

- 1 Jutten C, Herault J. Blind separation of sources, Part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic. *Signal Processing*, 1991, 24(1): 1-10
- 2 Hyvarinen A, Oja E. Independent component analysis: Algorithms and applications. *Neural Networks*, 2000, 13(4-5): 411-430

- 3 Xie SL, He ZS, Fu YL. A note on Stone's conjecture of blind separation. *Neural Computation*, 2004, 16: 245—319
- 4 Hyvärinen A. Fast and robust fixed-point algorithms for independent component analysis. *IEEE Trans Neural Networks*, 1999, 10(3): 626—634
- 5 Li YQ, Wang J, Zurada JM. Blind extraction of singularly mixed source signals. *IEEE Transactions, Neural Networks*, 2000, 11(6): 1413—1422
- 6 Li YQ, Amani S, Cichocki A, et al. Underdetermined blind source separation based on sparse representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(2): 423—437
- 7 Belouchrani A, Cardoso JF. Maximum likelihood source separation for discrete sources. In: *Proc EUSIPCO*, 1994, 768—771
- 8 Lewicki MS, Sejnowski TJ. Learning overcomplete representations. *Neural Computation*, 2000, 12: 337—365
- 9 Zibulevsky M, Pearlmutter BA. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary. *Neural Computation*, 2001, 13(4): 863—882
- 10 Bofill P, Zibulevsky M. Underdetermined source separation using sparse representation. *Signal Processing*, 2001, 81: 2353—2362
- 11 Xiao M, Xie SL, Fu YL. A novel approach for underdetermined blind sources separation in frequency domain. *Advances in Neural Networks, Proceedings Lecture Notes in Computer Science*, 2005, 3497: 484—489
- 12 Xie SL, Xiao M, Fu YL. A novel approach for underdetermined blind speech sources separation. *International Conference on Impulsive Dynamical Systems and Applications*, 2005, 1846—1853
- 13 Lee TW, Lewicki MS, Girolami M, et al. Blind source separation of more sources than mixtures using overcomplete representation. *IEEE Signal Processing Letter*, 1999, 6(4): 87—90
- 14 Li YQ, Cichocki A, Amani S. Analysis of sparse representation and blind source separation. *Neural Computation*, 2004, 16: 1193—1234
- 15 He ZS, Xie SL, Fu YL. Sparse representation and blind source separation of ill-posed mixtures. *Science in China, Series F-Information Science*, 2006, 49(5): 639—652
- 16 Georgiev P, Theis F, Cichocki A. Sparse component analysis and blind source separation of underdetermined mixtures. *IEEE Transactions of Neural Networks*, 2005, 16(4): 992—996
- 17 He ZS, Xie SL, Fu YL. Sparsity analysis of signals. *Progress in Natural Science*, 2006, 16(8): 879—884